Лекция 6
ОЦЕНКА СНИЗУ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ КОНЕЧНОГО ТИПА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

Для оценки снизу целой функции конечного типа нам понадобятся три леммы.

Лемма 6.1. Пусть $f(z) \in A(|z| \le R_0)$, $n(r)$ — число нулей $f(z)$ в круге $|z| < r < R_0$.

Если $f(0) = 1$, то $n(r) \le \ln(M(er))$, $er < R_0$, $M(r) = \max\limits_{|z|=r}|f(z)|$.

Доказательство. Пусть $R = er$ и $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — нули $f(z)$ в круге $|z| < r$. По теореме 2.1 справедливы неравенства

$$\left(\frac{er}{r}\right)^n \le \frac{(er)^n}{|a_1| \cdot |a_2| \cdots |a_n|} \le M(er).$$

Логарифмируя неравенство, получим $n \le \ln(M(er))$. Лемма доказана. ■

Лемма 6.2. Пусть $f(z) \in A(|z| < R)$ и в этом круге $\operatorname{Re} f(z) \le A(R)$, тогда справедливо неравенство

$$M(r) \le [A(R) - \operatorname{Re} f(0)]\frac{2r}{R-r} + |f(0)|, \quad 0 < r < R.$$

Доказательство. Положим $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $|z| < R$. По лемме 4.2

$$|c_n| \le \frac{2[A(R) - \operatorname{Re} c_0]}{R^n}, \quad n \ge 1.$$

Поэтому

$$M(r) \le \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| r^n + |f(0)| \le 2[A(R) - \operatorname{Re} c_0] \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n + |f(0)| =$$

$$= [A(R) - \operatorname{Re} c_0]\frac{2r}{R-r} + |f(0)|.$$

Лемма доказана. ■

Лемма 6.3. Пусть $f(z) \in A(|z| \le R)$ и $f(0) = 1$, $f(z) \ne 0$ внутри круга $|z| < R$. Тогда справедливо неравенство

$$\ln|f(z)| \ge -\frac{2r}{R-r}\ln M(R), \quad |z| \le r < R.$$

Доказательство. Функция $\ln f(z) \in A(|z| < R)$ и $\ln f(0) = 0$. В силу леммы 6.2 справедливо неравенство

$$|\ln f(z)| \le \frac{2r}{R-r}\ln M(R), \quad |z| \le r < R.$$

Так как $|\ln f(z)| \ge |\ln|f(z)||$, то

$$\ln|f(z)| \ge -\frac{2r}{R-r}\ln M(R).$$

Лемма доказана. ■

Оценим снизу произвольную аналитическую функцию.

Теорема 6.1. Пусть $f(z) \in A(|z| \le 2eR)$, $f(0) = 1$ и пусть $0 < \eta \le \frac{3}{2}e$. Тогда внутри $|z| \le R$ и вне исключительных кружков с общей суммой радиусов $4\eta R$ справедливо неравенство

$$\ln|f(z)| > -H(\eta)\ln M(2eR), \quad H(\eta) = 2 + \ln\frac{3e}{2\eta}.$$

Доказательство. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — нули $f(z)$ в круге $|z| < 2R$. Рассмотрим функцию

$$\varphi(z) = \frac{(-2R)^n}{a_1 a_2 \cdots a_n}\prod_{k=1}^{n}\frac{2R(z-a_k)}{(2R)^2 - \bar{a}_k z},$$

тогда $\varphi(0) = 1$, $|\varphi(z)| = \dfrac{(2R)^n}{|a_1 a_2 \cdots a_n|}$, $|z| = 2R$.

Функция $\psi(z) = \dfrac{f(z)}{\varphi(z)} \in A(|z| \le 2R)$, $\psi(0) = 1$, в круге $|z| < 2R$ не обращается в нуль. По доказанной лемме 6.3 при $|z| \le R$ имеем оценку

$$\ln|\psi(z)| \ge -\frac{2R}{R}\ln M(2R) + \frac{2R}{R}\ln\frac{(2R)^n}{|a_1 a_2 \cdots a_n|} \ge -2\ln M(2eR),$$

где $M(2R) = \max\limits_{|z|=2R}|f(z)|$, $\left|\prod\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2R(z-a_k)}{(2R)^2 - \bar{a}_k z}\right| = 1$, при $|z| = 2R$, функция $\dfrac{2R(z-a_k)}{(2R)^2 - \bar{a}_k z}$ осуществляет конформное отображение круга $|z| \le 2R$ на единичный круг.

Оценим снизу $|\varphi(z)|$. При $|z| \le R$ справедливо неравенство

$$\left|\prod_{k=1}^{n}\left|(2R)^2 - \bar{a}_k z\right|\right| < (6R^2)^n.$$

По теореме Картана вне кружков с общей суммой радиусов $4\eta R$ ($H = 2\eta R$) многочлен $\prod_{k=1}^{n} 2R(z - a_k)$ оценивается снизу:

$$\left|\prod_{k=1}^{n} 2R(z - a_k)\right| \ge (2R)^n \left(\frac{2\eta R}{e}\right)^n.$$

Следовательно, вне указанных кружков имеем оценку на функцию $\varphi(z)$ снизу

$$|\varphi(z)| > \frac{(2R)^{2n}}{|a_1 a_2 \cdots a_n|}\left(\frac{2\eta R}{e}\right)^n \frac{1}{(6R^2)^n} \ge \left(\frac{2\eta}{3e}\right)^n.$$

По лемме 6.1 число нулей функции $f(z)$ внутри круга $|z| < 2R$ имеет оценку $n = n(2R) \le \ln M(2eR)$, тогда $\ln|\varphi(z)| \ge \ln\left(\frac{2\eta}{3e}\right)\ln M(2eR)$.

Окончательно получаем

$$\ln|f(z)| > -\left(2 + \ln\frac{3e}{2\eta}\right)\ln M(2eR).$$

Теорема доказана. ■

Проведем теперь **оценку снизу целой функции конечного типа**.

Теорема 6.2. Пусть функция $f(z)$ — целая функция, порядок которой или меньше $\rho < +\infty$, или равен ρ, при этом тип меньше или равен $\sigma < +\infty$. Пусть также фиксировано $q > 1$. Имеются окружности $|z| = r_k$, $r_k \uparrow \infty$ и число $h = h(q)$ такое, что

$$\ln|f(z)| > -h(\sigma + \varepsilon)|z|^\rho, \quad |z| = r_k, \quad k > k_0(\varepsilon), \quad \varepsilon > 0,$$

причем $r_k < q r_{k-1}$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Доказательство. Возьмем числа

$$R_1 > 0, \quad R_2 = q_1 R_1, \ \ldots, \ R_k = q_1 R_{k-1}, \ \ldots, \ q_1 = \sqrt{q}.$$

Применим теорему 6.1, положив $R = R_k$ и $\eta < \frac{q_1 - 1}{8q_1}$. В круге $|z| \le R_k$, но вне исключительных кружков с общей суммой диаметров меньше $8\eta R_k$ имеем оценку

$$\ln|f(z)| > -H(\eta)\ln M(2eR_k).$$

Так как $8\eta R_k < (q_1 - 1)R_{k-1} = R_k - R_{k-1}$, то имеются окружности $|z| = r_k$ такие, что

$$R_{k-1} < r_k < R_k, \qquad \ln|f(z)| > -H(\eta)\ln M(2eR_k), \qquad |z| = r_k.$$

По условию теоремы $M(r) < e^{(\sigma+\varepsilon)r^\rho}$, $r > r_0(\varepsilon)$, тем самым

$$\ln|f(z)| > -(\sigma+\varepsilon)(2e)^\rho H(\eta)R_k^\rho, \qquad |z| = r_k,$$

но $R_k < q_1 r_k$, поэтому

$$\ln|f(z)| > -(\sigma+\varepsilon)h_1 r_k^\rho, \qquad |z| = r_k, \quad h_1 = (2eq_1)^\rho H(\eta).$$

Заметим, что h_1 не зависит от функции $f(z)$ и

$$\frac{r_{k+1}}{r_k} < \frac{R_{k+1}}{R_{k-1}} = q_1^2 = q.$$

Теорема доказана. ■

Перейдем к **оценке частного целых функций конечного типа**. Введем *класс целых функций* $[\rho, +\infty)$. По определению функция $f(z)$ принадлежит классу $[\rho, +\infty)$ ($f(z) \in [\rho, +\infty)$), если она имеет порядок, меньший ρ, или порядок, равный ρ, и конечный тип.

Теорема 6.3. Пусть $f(z) \in [\rho, +\infty)$ и $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ — все ее нули с кратностями $m_1, m_2, \ldots, m_n, \ldots$. Пусть $\varphi(z) \in [\rho, +\infty)$ и $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ — ее нули (могут быть и другие) кратностей не меньше $m_1, m_2, \ldots, m_n, \ldots$. Тогда функция

$$F(z) = \frac{\varphi(z)}{f(z)} \in [\rho, +\infty).$$

Доказательство. По теореме 6.2 имеются окружности $|z| = r_k \uparrow \infty$, $r_k < qr_{k-1}$, $q > 1$, на которых справедлива оценка снизу

$$|f(z)| > e^{-a|z|^\rho}, \quad |z| = r_k, \ k \ge 1.$$

Тем самым $|F(z)| < e^{h|z|^\rho}$, $|z| = r_k$, $k \ge 1$, $h > 0$.

Если $r_{k-1} < |z| < r_k$, то $|F(z)| \le \max\limits_{|t|=r_k}|F(t)| < e^{hr_k^\rho}$. Так как $r_k < qr_{k-1} \le q|z|$, то $|F(z)| < e^{h_1|z|^\rho}$, поэтому $F(z) \in [\rho, +\infty)$. Теорема доказана. ■

Как следствие этой теоремы получаем следующую теорему.

Теорема 6.4. Пусть $f(z)$ — целая функция порядка ρ и типа σ ($0 < \sigma < +\infty$), а $\varphi(z)$ — целая функция порядка меньше ρ или порядка ρ нулевого типа. Отсюда следует, что $F(z) = f(z)\varphi(z)$ — целая функция порядка ρ и типа σ.

Доказательство. Функция $F(z)$ не может быть порядка ρ и типа, большего σ. Предположим, что $F(z)$ растет не быстрее функции порядка ρ и типа $\sigma_F = a < \sigma$. По теореме 6.2 имеются окружности $|z| = r_k \uparrow \infty$, $r_k < q r_{k-1}$, на которых справедлива оценка снизу

$$|\varphi(z)| > e^{-h\varepsilon|z|^\rho}, \quad |z| = r_k, \ \varepsilon > 0.$$

Поэтому

$$|f(z)| \le e^{(a+\varepsilon+h\varepsilon)|z|^\rho}, \quad |z| = r_k, \ k > k_0(\varepsilon).$$

Пусть z таково, что $r_{k-1} \le |z| \le r_k$, тогда

$$|f(z)| \le \max_{|t|=r_k} |f(t)| \le e^{(a+\varepsilon+h\varepsilon)r_k^\rho} \le e^{(a+\varepsilon+h\varepsilon)q^\rho|z|^\rho}, \quad |z| > r_0(\varepsilon), \ \varepsilon > 0.$$

Получаем, что тип функции $f(z)$ — $\sigma \le aq^\rho$. Напомним, что q — любое фиксированное число и $q > 1$. Отсюда следует, что тип $\sigma \le a < \sigma$. Пришли к противоречию. Теорема доказана. ■

Задачи

Доказать, что следующие функции целые, и найти их тип, если порядок $0 < \rho < \infty$:

I. $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n z^n}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad A > 0, \ \alpha > 0;$$

II. $$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n};$$

III. $$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{n/\alpha} z^n, \quad \alpha > 0;$$

IV. $$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2} z^n;$$

V. $$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n \ln n}\right)^{n/\alpha} z^n, \quad \alpha > 0;$$

VI. $$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^{n^{1+\alpha}}}, \quad \alpha > 0;$$

VII. $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{ch}\sqrt{n}}{n!} z^n.$$